جامعة بنـها ـ كلية العلوم – قسم الرياضيات

المستوى الثالث – قسم الفيزياء

يوم الامتحان: 1 / 1 / 2020 م

المادة : معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاصه (318 ر)

الممتحن: د . / محمد السيد عبدالعال

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

نموذج الأسئله + نموذج إجابه

ورقة كامله

جـــامعة بنـــــها
كلـية الــــعلوم
قسم الرياضيات

نموذج اجابة امتحان
معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاصة(318 ر)
التاريخ: 2020/1/1

نموذج اجابه لأمتحان رياضيات (5) معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاصه -لطلاب الفرقة الثالثة – كلية العلوم

معادلات تفاضلية جزئية ودوال خاصة (318 ر) ترم تخرج

أجب على الاسئله التاليه (الدرجة الكلية 80 درجة)

السؤال الأول (25 درجة) :-

1- **أثبت** أن:

$$2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}$$

2- **أوجد** حل المعادلة التفاضلية الجزئية الاتية:

$$z\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z^2+(x+y)^2$$

3- **أوجد** تحويل لابلاس للدالة: $F(t)=\{\frac{t^3}{3}+t^2e^{-2t}+cosh5t\}$.

4- **أثبت** أن $\beta(x,y)\equiv\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\quad,\quad x,y>0$

ومن ثم أوجد قيمة $\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

السؤال الثانى (30 درجة) :-

1- أوجد التكاملات الاتية بأستخدام الدوال الخاصة:

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}tan^{\frac{1}{2}}(x)\,dx\;,\quad(2)\int_0^{\infty}\sqrt{x}\;e^{-\sqrt[3]{x}}dx\quad(3)\int_0^5x^4\sqrt{25-x^2}dx$$

2- أثبت أن: $\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}$

حيث ان $P(x)$ كثيرة حدود لاجيندر من الدرجة n .

3- كون المعادلة التفاضلية الجزئية المناظرة للدالة:

$\phi(x+y+z,\;x^2+y^2-z^2)=0$ حيث ϕ دالة أختيارية فى x,y,z

وما هى رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية التى سنحصل عليها.

4- أثبت أن: $\psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}$ حيث ان : $\psi(x)=\frac{d}{dx}log\Gamma(x)$

انظر خلف الورقة

جـــامعة بنـــــها
كلـية الـــــعلوم
قسم الرياضيات

نموذج اجابة امتحان
معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاصة(318 ر)
التاريخ: 2020/1/1

السؤال الثالث (25 درجة) :-

1- بأستخدام تحويل لابلاس **أوجد** حل المعادلة التفاضلية الاتية مع الشروط المذكورة:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - 3\frac{dY}{dx} + 2\,Y = 8 \qquad , \quad Y(0) = -3, \quad Y'(0) = 5$$

2- أستنتج العلاقة التكرارية الاتية:

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x)$$

3- مستخدما العلاقة السابقة **أوجد** كلاً من $\mathrm{P}_3(x)\mathrm{P}_2(x)$, علما بأن $\mathrm{P}_0(x) = 1, \ \mathrm{P}_1(x) = \mathrm{x}$ ثم **أكتب** الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 3x & 0 < x < 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

على شكل متسلسلة$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x)$ كثيرات حدود لاجيندر (**الأربع حدود الاولى فقط**).

4- **كون** المعادلة التفاضلية الجزئية المناظرة للدالة:
$\mathrm{Z} = ax + by + cxy$ حيث a, b ثوابت أختيارية
وما هى رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية التى سنحصل عليها.

------------- **انتهت أسئلة** --

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

د. محمد السيد عبدالعال

اجابة السؤال الأول

السؤال الأول (35 درجة) :-

1- **أثبت** أن:

$$\mathbf{2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}$$

الحـــــــل

$$\because \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

بوضع $x = n - \frac{1}{2}$ نحصل على

$$\therefore \Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})$$

$$= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{3}{2})$$

$$= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})(n-\frac{5}{2})\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$

$$\therefore 2^n\Gamma(n+\frac{1}{2}) = 1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}$$

=-=-=-=-=-=---

2- **أوجد** حل المعادلة التفاضلية الجزئية الاتية:

$$z\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = z^2 + (x+y)^2$$

الحـــــــل

يمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة

$$zp - zq = z^2 + (x+y)^2$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة هي

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{-z}=\frac{dz}{z^2+(x+y)^2}$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد أن

$$dx+dy=0 \quad\Rightarrow\quad \therefore x+y=c_1 \quad\Rightarrow\quad \therefore u=x+y$$

من النسبتين الثانية والثالثة نجد أن

$$dy=\frac{-z\,dz}{z^2+c_1^2} \quad\Rightarrow\quad \therefore 2dy=\frac{-2z\,dz}{z^2+c_1^2}$$

ويكون حل المعادلة المعطاة هو

$$\ln(z^2+c_1^2)=-2y+\ln c_2 \quad\Rightarrow\quad \therefore \ln(z^2+c_1^2)-\ln c_2=-2y$$

$$\frac{z^2+c_1^2}{c_2}=e^{-2y} \quad\Rightarrow\quad \therefore c_2=e^{2y}\left[z^2+(x+y)^2\right]$$

$$\therefore v=e^{2y}\left[z^2+(x+y)^2\right]$$

$$\Phi\left[(x+y),e^{2y}(z^2+(x+y)^2)\right]=0$$

3- **أوجد** تحويل لابلاس للدالة: $F(t)=\{\frac{t^3}{3}+t^2e^{-2t}+cosh5t\}$.

$$\because L\{e^{-2t}\}=\frac{1}{s+2}$$

$$\therefore L\{te^{-2t}\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right)=\frac{1}{(s+2)^2}$$

$$\therefore L\{t^2e^{-2t}\}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+2}\right)=\frac{2}{(s+2)^3}$$

$$L\{\cosh 5t\}=\frac{s}{s^2-25}$$

$$L\left\{\frac{t^3}{3}+t^2e^{-2t}+cosh5t\right\}=\frac{6}{3s^4}+\frac{2}{(s+2)^3}+\frac{s}{s^2-25}$$

======

4- أثبت أن $\beta(x,y) \equiv \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $x, y > 0$

ومن ثم أوجد قيمة $\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

الحـــــل

نعلم من تعريف دالة جاما أن

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$$

باستخدام التعويض $t = x^2 \Leftarrow dt = 2xdx$

$$\therefore \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-2} \cdot 2xdx$$

$$\therefore \Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \qquad (a)$$

$$\therefore \Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy \qquad (b)$$

بضرب المعادلتين (a),(b) نحصل على

$$\therefore \Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dxdy$$

باستخدام التعويض التالي

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta)$$

$$0 < \theta < \pi/2 \quad 0 < r < \infty, \qquad \therefore dxdy = r\,drd\theta,$$

نحصل على

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta$$

$$= \Gamma(p+q)\cdot\beta(p,q)$$

$$\therefore \beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

$$\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{3\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

جـــامعة بنـــــها
كلـية الــــــعلوم
قسم الرياضيات

نموذج اجابة امتحان
معادلات تفاضلية جزئيه ودوال خاصة(318 ر)
التاريخ: 2020/1/1

السؤال الثانى (30 درجة) :-

1- أوجد التكاملات الاتية بأستخدام الدوال الخاصة:

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} tan^{\frac{1}{2}}(x)\,dx \;,\quad (2)\int_0^{\infty}\sqrt{x}\;e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx \quad \int_0^5 x^4\sqrt{25-x^2}\,dx$$

الحـــــــل

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2}}\,(\cos x)^{\frac{-1}{2}}dx=\frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$

2. $\int_0^{\infty}\sqrt{x}\;e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx$

نستخدم التعويضة $\sqrt[3]{x}=u\;\Rightarrow x=u^3\;\Rightarrow dx=3u^2du$

$$\int_0^{\infty}u^{\frac{3}{2}}\,e^{-u}\,u^2\;du\quad=\int_0^{\infty}3\,u^{\frac{7}{2}}\,e^{-u}\;du\;=3\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=3.\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$$

3. $\int_0^5 x^4\sqrt{25-x^2}\,dx=\int_0^1 5^4u^2\;5\sqrt{1-u}\;\frac{5}{2\sqrt{u}}du=$

$$=\frac{5^6}{2}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\;(1-u)^{\frac{1}{2}}du=\frac{5^6}{2}\beta\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{5^6}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)}$$

$$=\frac{5^6}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\;\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi 5^6}{32}$$

====

2- أثبت أن: $\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx\;=\frac{2}{2n+1}$

حيث ان $P(x)$ كثيرة حدود لاجيندر من الدرجة n

الحـــــــل

سبق أن علمنا أن $\left[1-2hx+h^2\right]^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(x)$

أيضاً $\left[1-2hx+h^2\right]^{-1/2}=\sum_{m=0}^{\infty}h^mP_m(x)$

$$\therefore\left[1-2hx+h^2\right]^{-1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(x)\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}h^mP_m(x)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h^{n+m} P_n(x) P_m(x)$$

بتكامل الطرفين بالنسبة للمتغير x من -1 إلى 1 نحصل على

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2hx+h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h^{n+m} \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx$$

تكامل الطرف الأيمن من المعادلة السابقة ينعدم عندما $n \neq m$ ماعدا عندما $n = m$ فإنه يساوي

$$-\frac{1}{2h} \ln(1-2hx+h^2)\Big|_{-1}^{1} = \sum_{n=0}^{\infty} h^{2n} \int_{-1}^{1} P_n^2 dx$$

$$\therefore \frac{1}{h} \ln\frac{1+h}{1-h} = \frac{1}{h}[\ln(1+h) - [\ln(1-h)] = \sum_{n=0}^{\infty} h^{2n} \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\ dx$$

لكننا نعلم مما سبق دراسته أن

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \cdots, \qquad , \qquad \ln(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \cdots$$

$$\frac{1}{h} \ln\frac{1+h}{1-h} = \frac{1}{h}\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \cdots + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4} \cdots\right)$$

$$= h^{-1} \cdot 2\left[h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} \cdots\right] = 2\left[1 + \frac{h^2}{3} + \frac{h^4}{5} \cdots\right]$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx \cdot h^{2n}$$

بمساواة معامل h^{2n} في كل من الطرفين نجد أن

$$\text{(13)} \quad \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

1- **كون** المعادلة التفاضلية الجزئية المناظرة للدالة:

حيث $\phi(x+y+z,\ x^2+y^2-z^2)=0$ دالة أختيارية فى x, y, z حيث ϕ

وما هى رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية التى سنحصل عليها.

الحـــــل

نفرض أن

$$u = x+y+z \quad , \quad v = x^2+y^2-z^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z}=1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial z}=-2z$$

نجد أن(6) صفحة (3)بالتعويض في المعادلة

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+p & 2x-2pz \\ 1+q & 2y-2qz \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore 2(1+p)(y-qz)-2(1+q)(x-pz)=0$$

ومنها نحصل على $(y+z)p-(x+z)q=x-y$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى .

=---==--===-----

1- **أثبت** أن: $\psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}$ حيث ان : $\psi(x)=\frac{d}{dx}\log\Gamma(x)$

من المعروف أن

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

أي أن

$$\log\Gamma(x+1)=\log x+\log\Gamma(x)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

وهذا يعني أن: $\psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}$

====

السؤال الثالث (25 درجة) -:

1) بأستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المعادلة التفاضلية الاتية مع الشروط المذكورة:

$$\frac{d^2Y}{dx^2}-3\frac{dY}{dx}+2\,Y=4e^{2t}$$

$$.\;\; Y(0)=-3,\;\; Y'(0)=5$$

الحـــــــل بأخذ تحويل لابلاس لكل من الطرفين نجد أن $L\{Y\}=y(s)$ بفرض أن

$$L^{-1}\{Y''\}-3L^{-1}\{Y'\}+2L^{-1}\{Y\}=8L^{-1}\left\{e^{2t}\right\}$$

$$\therefore\;\; s^2y-sY(0)-Y'(0)-3[sy-Y(0)]+2y=\frac{8}{s-2}$$

بالتعويض عن الشروط الابتدائية نجد أن

$$(s^2-3s+2)y+3s-14=\frac{8}{s-2}$$

$$\therefore y=\frac{8}{(s-2)(s^2-3s+2)}+\frac{14-3s}{(s^2-3s+2)}$$

$$\therefore y=\frac{-3s^2+20s-20}{(s-2)^2(s-1)}=\frac{a}{s-1}+\frac{b}{s-2}+\frac{c}{(s-2)^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي لكل من الطرفين نجد أن:

$$Y(t)=ae^t+be^{2t}+cte^{2t}.$$

==-=--====-===-=-=-=-=

2) أستنتج العلاقة التكرارية الاتية:

$$(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)=(2n+1)xP_n(x)$$

كثيرات حدود لاجندر تعرف من الدالة المولدة من

$$(1-2hx+h^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n P_n(x) \qquad (1)$$

بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة للمتغير h نحصل على

$$-\frac{1}{2}\left[1-(2hx-h^2)\right]^{-3/2}(-2x+2h)=\sum_{n=0}^{\infty}nh^{n-1}P_n(x)$$

أي أن

$$(5)(x-h)(1-2hx+h^2)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}nh^{n-1}P_n(x)$$

بضرب طرفي المعادلة في $(1-2hx+h^2)$ نحصل على

$$(x-h)(1-2hx+h^2)^{-1/2}=(1-2hx+h^2)\sum_{n=0}^{\infty}nh^{n-1}P_n(x)$$

باستخدام المعادلة (1) نحصل على

$$(x-h)\sum_{n=0}^{\infty}h^n P_n(x)=(1-2hx+h^2)\sum_{n=0}^{\infty}nh^{n-1}P_n(x)$$

بمساواة معاملات h^n في كل من طرفي المعادلة السابقة نحصل علي

$$xP_n(x)-P_{n-1}(x)=(n+1)P_{n+1}(x)-2nxP_n(x)$$

$$+(n-1)P_{n-1}(x)$$

$$\therefore (n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

===

3) مستخدما العلاقة السابقة **أوجد** كلاً من $P_3(x)P_2(x)$, علما بأن $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$ ثم **أكتب** الدالة :

$$f(x)=\begin{cases}3x & 0<x<1\\ 0 & -1<x<0\end{cases}$$

على شكل متسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(x)$ كثيرات حدود لاجيندر (**الأربع حدود الاولى فقط**).

الحل.

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

$$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\ P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{0}0\cdot P_n(x)dx+\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1}3x\,P_n(x)dx$$

$$\therefore A_{\circ}=\frac{1}{2}\int_0^1(3x)P_0(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 dx=\frac{3}{4}$$

$$A_1=\frac{3}{2}\int_0^1(3x)\,P_1(x)dx=\frac{9}{2}\int_0^1 x^2dx=\frac{3}{2}$$

$$A_2=\frac{5}{2}\int_0^1(3x)P_2(x)dx=\frac{5}{2}\int_0^1\frac{3}{2}(3x^3-x)dx=\frac{15}{4}(\frac{3}{4}x^4-\frac{x^2}{2})=\frac{15}{8}$$

$$A_3=\frac{7}{2}\int_0^1\frac{3}{2}(5x^4-3x^2)dx=0$$

و هكذا نحصل على

$$f(x)=\frac{3}{4}P_{\circ}(x)+\frac{3}{2}P_1(x)+\frac{15}{8}P_{\circ}(x)+\cdots$$

====

4) **كون** المعادلة التفاضلية الجزئية المناظرة للدالة:
$Z=ax+by+cxy$ حيث a,b ثوابت أختيارية
وما هى رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية التى سنحصل عليها.

الحــــل

بتفاضل Z بالنسبة إلى x,y على التوالي نحصل على

$$p=a+cy \qquad (1)$$

$$q=b+cx \qquad (2)$$

بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x ، والمعادلة (2) بالنسبة إلى y نجد أن

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0 \qquad (4)$$

بتفاضل (1) بالنسبة إلى y والمعادلة (2) بالنسبة إلى x والمعادلة الأصلية بالنسبة إلى x, y نجد أن

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = c \quad , \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \equiv s = c \qquad (5)$$

من المعادلات (1),(2),(5) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} a &= p - sy \\ b &= q - sx \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

بالتعويض من (6) في المعادلة الأصلية نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية

$$Z = px + qy - sxy - sxy + sxy$$
$$\therefore Z = px + qy - sxy$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية .

انتهت الأجابة